

安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《 高等代数（下） 》期中考试试卷

标准答案与评分细则

一、填空题（共 35 分）

1（5 分）、 $(f(x), g(x)) = \underline{x-1}$ 。

2（20 分）、已知复矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda I - A| = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$ ，请写出与 A 相似的所有可能的 Jordan 标准形（不计较排列次序），并把下面表格填写完整（若列不够，可增加）。

与 A 相似的所有可能的 Jordan 标准形	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
对应的初等因子组	$\lambda, \lambda, \lambda-1, \lambda-1$	$\lambda, \lambda, (\lambda-1)^2$	$\lambda^2, \lambda-1, \lambda-1$	$\lambda^2, (\lambda-1)^2$
对应的不变因子	$1, 1, \lambda(\lambda-1), \lambda(\lambda-1)$	$1, 1, \lambda, \lambda(\lambda-1)^2$	$1, 1, \lambda-1, \lambda^2(\lambda-1)$	$1, 1, 1, \lambda^2(\lambda-1)^2$
对应的行列式因子	$1, 1, \lambda(\lambda-1), \lambda^2(\lambda-1)^2$	$1, 1, \lambda, \lambda^2(\lambda-1)^2$	$1, 1, \lambda-1, \lambda^2(\lambda-1)^2$	$1, 1, 1, \lambda^2(\lambda-1)^2$
对应的 A 的极小多项式	$\lambda(\lambda-1)$	$\lambda(\lambda-1)^2$	$\lambda^2(\lambda-1)$	$\lambda^2(\lambda-1)^2$

3（5 分）、 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

4（5 分）、 $|B| - \text{tr}(B) = 52$ 。

二、简答题（每小题 5 分，共 10 分）

5、解：例如 $x^n + 5$ （ n 为充分大整数）在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约。因为取素数 $p=5$ ，显然 $p|5$ ，但 p 不能整除首项系数 1，又 $p^2 \nmid 5$ 。所以由 Eisenstein 判别法知， $x^n + 5$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

$$6、\left[\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & -2 & & \\ & 1 & -2 & \\ & & -2 & \\ & & 1 & -2 \end{array}\right] \text{ 或 } \left[\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & -2 & & \\ & 1 & -2 & \\ & & -2 & \\ & & & -2 \end{array}\right]$$

三、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

7、解：由 $f(x) = x^7 + 2x^6 - 6x^5 - 8x^4 + 17x^3 + 6x^2 - 20x + 8$ 可得.

$$f'(x) = 7x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 32x^3 + 51x^2 + 12x - 20.$$

用辗转相除法求得

$$(f, f') = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4,$$

$$\text{于是 } q(x) = \frac{f}{(f, f')} = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2). \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

由于 $f(x)$ 与 $q(x)$ 有相同的不可约因式 $x-1, x+2$ ，所以 $f(x)$ 有根 1 与 -2.5 分

再用综合除法，

1	2	-6	-8	17	6	-20	8	
	1	3	-3	-11	6	12	-8	
1	3	-3	-11	6	12	-8	0	
	1	4	1	-10	-4	8		
1	4	1	-10	-4	8		0	
	1	5	6	-4	-8			
1	5	6	-4	-8		0		
	1	6	12	8				
1	6	12	8		0			
	1	7	19					
1	7	19		27	0			

可见 1 是 $f(x)$ 的 4 重根，那么 -2 就是 $f(x)$ 的 3 重根，所以 $f(x)$ 的典型分解式为

$$f(x) = (x-1)^4(x+2)^3. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

8、解：矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$$

特征值为： $\lambda = 2$ （三重）。3 分

对应的特征向量有两个: $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, 1)^T$ 。对应的特征方程是

$$A\alpha_1 = 2\alpha_1, \quad A\alpha_2 = 2\alpha_2。$$

(1) 故可得 A 的 $Jordan$ 标准形 $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 5 分

(2) 设非奇异矩阵 P 满足 $P^{-1}AP = J$, 即 $AP = PJ$ 。由 $A\alpha_1 = 2\alpha_1, A\alpha_2 = 2\alpha_2$, 故

可设 $P = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$ 或 $P = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$, 其中 α_3 待求。

(i) 若 $P = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$, 由 $AP = PJ$ 可得 $A\alpha_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, 等价于 $(A - 2I)\alpha_3 = \alpha_2$, 无解;

(ii) 若 $P = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$, 由 $AP = PJ$ 可得 $A\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_3$, 等价于 $(A - 2I)\alpha_3 = \alpha_1$, 解出

$$\alpha_3 = (1, -2, 0)^T$$

所以 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 满足 $P^{-1}AP = J$ 。(P 不唯一)10 分

四、证明题 (共 35 分)

9 (10 分)、证明: 若 $(f, g) = 1$, 则存在一对多项式 u, v 满足 $\deg u < \deg g, \deg v < f$, 使得 $uf + v \neq 1$ 成立。

证明: 由 $(f, g) = 1$ 知, 存在多项式 u_1, v_1 使得 $u_1 f + v_1 g = 1$ 成立。3 分

分别用 g 去除 u_1 , f 去除 v_1 , 得到带余除法表达式:

$$u_1 = q_1 g + u, \quad v_1 = q_2 f + v,$$

其中 $\deg u < \deg g, \deg v < f$ 。把上式代入到 $u_1 f + v_1 g = 1$ 并整理得:

$$(q_1 + q_2)fg + uf + vg = 1。$$

因为 $\deg(fg) > \deg(uf + vg)$, 故必有 $(q_1 + q_2)fg = 0$ 。因此, $\exists u, v$ 满足 $\deg u < \deg g, \deg v < f$, 使得 $uf + vg = 1$ 成立。10 分

10 (10 分)、证明: 由题设条件知, 存在非奇异矩阵 P 使得下式成立

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \dots, \lambda_k I_{r_k})。 \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

取 $A_i = P \text{diag}(0, \dots, 0, I_{r_i}, 0, \dots, 0) P^{-1} (i = 1, 2, \dots, k)$, 即有 $\sum_{i=1}^k A_i = I_n$ 与 $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$ 成立。

.....10 分

11 (15 分)、证明: n 阶矩阵 A 可以对角化的充分必要条件是与下面每一条等价:

- (1) A 有 n 个线性无关的特征向量;
- (2) $F^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$, 其中 $V_{\lambda_i} = \{X \mid AX = \lambda_i X\}$;
- (3) A 的每一个特征值的几何重数等于代数重数。

证明: 先证 A 可以对角化 $\Leftrightarrow$ (1)。

由定义可知, A 可以对角化 $\Leftrightarrow$ 存在非奇异矩阵 $P = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 成立,

或等价地, $A(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 成立 $\Leftrightarrow A\xi_i = \lambda_i \xi_i (i=1, \cdots, n)$ 。由 P 的非奇异性

知, $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是线性无关的特征向量。5 分

再证 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)。

(1) $\Leftrightarrow$ (2): A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow$ 对于所有 $V_{\lambda_i} = \{X \mid AX = \lambda_i X\}$ 中的特征向量可以构成 F^n 空间的一个基, 故可以生成 F^n 。再由这些特征向量的线性无关性, 可知和是直和, 即 $F^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ 。10 分

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 要使 (2) 成立, 当且仅当每一个特征子空间的维数必须等于它的代数重数, 否则的话, 特征子空间的和就不能生成整个 F^n 空间。15 分